



Université de Strasbourg
UFR de Mathématiques

Asymptotique des nombres premiers

Mémoire de Licence 3 Mathématiques

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$$

Étudiants :

Gauthier Ciotta Loan Ruble Benjamin Garcia

Encadrant : Olivier Guichard

Année universitaire 2025–2026

Table des matières

Introduction	2
1 Position du problème	3
1.1 Notations	3
1.2 Quelques rappels	3
1.2.1 Infinité de nombres premiers	3
1.2.2 Lemme de Gauss	4
1.2.3 Formule de Legendre	5
2 Le théorème de Tchebychev	8
2.1 Majoration	9
2.1.1 Produit des nombres premiers	9
2.1.2 Majoration de $\pi(x)$	11
2.2 Minoration	13
2.3 Encadrement de la fonction π	15
2.4 La fonction θ	16
3 Les théorèmes de Mertens	18
3.1 Premier théorème de Mertens	18
3.2 Deuxième théorème de Mertens	20
4 Le théorème des nombres premiers	22
4.1 Histoire et stratégie	22
4.2 Le lemme de Newman	23
4.3 Lien entre ζ et l'intégrale de Newman	25
4.4 Non annulation de Zêta	27
4.5 Théorème taubérien de Newman	30
4.6 Démonstration du théorème des nombres premiers	35
Conclusion	37

Introduction

Depuis les débuts des mathématiques, les nombres premiers exercent une fascination singulière. Briques élémentaires à partir desquelles se construisent tous les entiers, ils occupent les mathématiciens depuis l'Antiquité : Euclide démontrait déjà leur infinité, et Ératosthène concevait son crible pour les débusquer. Plus de deux millénaires plus tard, ils n'ont rien perdu de leur pouvoir d'attraction.

Cette fascination tient sans doute à un contraste saisissant. Les nombres premiers se laissent décrire par des énoncés d'une simplicité désarmante, que l'on peut formuler en une phrase et soumettre à un enfant — et qui résistent pourtant à toute démonstration depuis des siècles. Tout nombre pair est-il somme de deux premiers ? Existe-t-il une infinité de premiers jumeaux, séparés de seulement deux unités ? Ces questions, énoncées il y a des centaines d'années, demeurent aujourd'hui encore ouvertes. Rares sont les domaines où l'écart entre la facilité de la question et la difficulté de la réponse se révèle aussi vertigineux.

Au cœur de ces interrogations se trouve une énigme plus fondamentale encore : celle de la *répartition* des nombres premiers. À première vue, ils surgissent parmi les entiers de façon erratique, sans loi apparente ; on observe des premiers très rapprochés, puis de longues plages désertes, sans qu'aucune règle ne semble présider à leur apparition. Comment, dès lors, prévoir leur abondance ? Notons $\pi(x)$ le nombre de premiers inférieurs ou égaux à x . Tout le paradoxe est là : derrière ce désordre local se cache une régularité globale d'une remarquable précision. C'est Gauss, puis Legendre, qui en formulent la première trace, en conjecturant que

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Ce résultat, le *théorème des nombres premiers*, est l'objet de ce mémoire. Conjecturé à la fin du XVIII^e siècle, il ne fut démontré qu'un siècle plus tard, au prix d'un détour inattendu par l'analyse complexe et la fonction ζ de Riemann. Nous en présentons la preuve due à Newman, qui atteint ce but profond avec une économie de moyens remarquable : après quelques préliminaires arithmétiques et l'encadrement de Tchebychev, le passage par la fonction ζ et un théorème taubérien nous conduiront à établir cette régularité longtemps demeurée mystérieuse.

Chapitre 1

Position du problème

1.1 Notations

Dans la suite du document nous noterons :

- $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.
- Dans tout le document la lettre p **désigne toujours un nombre premier**. Par exemple au lieu de noter $\sum_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} 1$ on écrira simplement $\sum_{p \leq n} 1$.
- $\llbracket a, b \rrbracket$ l'intervalle d'entier $\{a, \dots, b\}$.
- On note pour $a, b \in \mathbb{N}^*$ $a \mid b$ la relation a divise b .
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$ $v_p(n)$ la valuation p -adique de n , c'est-à-dire le plus grand entier naturel k tel que $p^k \mid n$.
- On note $|A|$ ou $\text{Card}(A)$ le cardinal d'un ensemble A .
- On note pour $x \geq 1$ $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x :

$$\pi(x) = \text{Card}(\{p \in \mathcal{P} \mid p \leq x\}) = \sum_{p \leq x, p \in \mathcal{P}} 1.$$

- On note pour $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ l'unique entier tel que $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$.

1.2 Quelques rappels

1.2.1 Infinité de nombres premiers

Proposition 1.1: infinité de nombres premiers

Il existe une infinité de nombres premiers

Démonstration. Supposons, par l'absurde, qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers, que l'on note

$$p_1 < p_2 < \dots < p_n.$$

Considérons alors l'entier

$$N = p_1 p_2 \cdots p_n + 1.$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$N \equiv 1 \pmod{p_i}.$$

Ainsi, aucun des nombres premiers p_i ne divise N .

Or tout entier strictement supérieur à 1 admet un diviseur premier. Donc il existe un nombre premier q divisant N .

Comme aucun des p_i ne divise N , on a nécessairement

$$q \notin \{p_1, \dots, p_n\}.$$

On obtient donc un nombre premier distinct de tous les p_i , ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle $p_1, \dots, p_n$ sont les seuls nombres premiers.

Par conséquent, il existe une infinité de nombres premiers. ■

1.2.2 Lemme de Gauss

Lemme 1.2: Lemme de Gauss

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$. Si $a \mid bc$ et $\gcd(a, b) = 1$, alors $a \mid c$.

Démonstration. Comme $\gcd(a, b) = 1$, le théorème de Bézout fournit deux entiers $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que

$$au + bv = 1.$$

En multipliant cette égalité par c , on obtient

$$acu + bcv = c.$$

Or $a \mid acu$ trivialement, et $a \mid bcv$ puisque $a \mid bc$ par hypothèse. Ainsi a divise la somme $acu + bcv = c$, ce qui prouve $a \mid c$. ■

Proposition 1.3: Corollaire lemme de Gauss

Soient $m, a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$. Si $\gcd(a_1, m) = 1$ et $\gcd(a_2, m) = 1$, alors $\gcd(a_1 a_2, m) = 1$.
Par récurrence, un produit fini d'entiers tous premiers avec m est premier avec m .

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons $\gcd(a_1 a_2, m) > 1$. Il existe alors un nombre premier q tel que $q \mid a_1 a_2$ et $q \mid m$. Comme q est premier et $q \mid a_1 a_2$, le lemme de Gauss appliqué avec $\gcd(q, a_1) \in \{1, q\}$ entraîne $q \mid a_1$ ou $q \mid a_2$.

- Si $q \mid a_1$, alors q divise à la fois a_1 et m , donc $\gcd(a_1, m) \geq q > 1$, ce qui contredit l'hypothèse.
- Si $q \mid a_2$, alors de même $\gcd(a_2, m) > 1$, contradiction.

Dans les deux cas on aboutit à une contradiction, donc $\gcd(a_1 a_2, m) = 1$.

Le cas d'un produit $a_1 a_2 \cdots a_r$ s'en déduit immédiatement par récurrence sur r . ■

1.2.3 Formule de Legendre

Proposition 1.4: Formule de Legendre

Soit $p \in \mathcal{P}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors la valuation p -adique de $n!$ est donnée par

$$v_p(n!) = \sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$

Démonstration. On a $v_p(n!) = \sum_{k=1}^n v_p(k)$.

Pour $(i, k) \in \mathbb{N}^{*2}$ on note

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si } p^i \mid k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors :

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^n \sum_{i \geq 1} \delta_{ik}$$

Les sommes étant finies :

$$\begin{aligned} v_p(n!) &= \sum_{i \geq 1} \sum_{k=1}^n \delta_{ik} \\ &= \sum_{i \geq 1} |\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket : p^i \mid k\}| \\ &= \sum_{i \geq 1} |\{p^i, 2p^i, \dots, \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor p^i\}| \\ &= \sum_{i \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor \end{aligned}$$

■

Proposition 1.5: Corollaire de Legendre

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathcal{P}$.

$$\text{Si } p^k \mid \binom{2n}{n} \text{ alors } p^k \leq 2n$$

Démonstration. Commençons par calculer la valuation p -adique du coefficient binomial. D'après la formule de Legendre,

$$v_p \left(\binom{2n}{n} \right) = v_p((2n)!) - 2v_p(n!) = \sum_{k \geq 1} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right). \quad (*)$$

Montrons maintenant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}.$$

Soit donc $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$2x - 1 < \lfloor 2x \rfloor \leq 2x,$$

et

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x.$$

En multipliant la seconde inégalité par -2 , on obtient :

$$-2x \leq -2\lfloor x \rfloor < -2x + 2.$$

En additionnant les deux encadrements précédents :

$$-1 < \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor < 2.$$

Comme

$$\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z},$$

on en déduit :

$$\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \in]-1, 2[\cap \mathbb{Z} = \{0, 1\}.$$

Ainsi, chaque terme de la somme (*) vaut 0 ou 1.

Par ailleurs, la somme (*) est nulle dès que

$$p^k > 2n,$$

c'est-à-dire dès que

$$k \ln(p) > \ln(2n).$$

Par conséquent,

$$v_p \left(\binom{2n}{n} \right) = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln(p)} \rfloor} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right).$$

Comme chaque terme vaut au plus 1, on obtient :

$$v_p \left(\binom{2n}{n} \right) \leq \left\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln(p)} \right\rfloor \leq \frac{\ln(2n)}{\ln(p)}.$$

Ainsi, si

$$p^k \mid \binom{2n}{n},$$

alors

$$k \leq v_p \left(\binom{2n}{n} \right) \leq \frac{\ln(2n)}{\ln(p)}.$$

En multipliant par $\ln(p)$ puis en exponentiant, on obtient finalement :

$$p^k \leq 2n.$$

■

Chapitre 2

Le théorème de Tchebychev

Jusqu'ici, on a défini la fonction de comptage π sans disposer d'aucune estimation de sa taille. L'objectif de ce chapitre est d'en obtenir une : un contrôle de la croissance de $\pi(x)$ par des multiples de $x/\ln(x)$.

Plutôt que de travailler directement avec π , on introduit la fonction θ , somme des $\ln(p)$ pour p premier inférieur à x . Le logarithme transforme les produits de nombres premiers en sommes, ce qui rend θ nettement plus maniable que π . On verra de plus que les deux fonctions sont liées par l'équivalence $\theta(x) \sim \pi(x) \ln(x)$: estimer θ revient donc à estimer π .

C'est essentiellement la démarche de Tchebychev. Vers 1850, soit près d'un demi-siècle avant la preuve du théorème des nombres premiers, il fut le premier à établir rigoureusement que $\pi(x)$ est bien de l'ordre de $x/\ln(x)$: il a montré l'existence de deux constantes $a, b > 0$ telles que, pour x assez grand,

$$a \frac{x}{\ln(x)} \leq \pi(x) \leq b \frac{x}{\ln(x)}.$$

Ses arguments sont entièrement élémentaires et reposent sur l'étude arithmétique des coefficients binomiaux et sur la formule de Legendre. Il a même montré que si le quotient $\pi(x)/(x/\ln(x))$ admet une limite, cette limite vaut nécessairement 1 ; mais l'existence de cette limite, c'est-à-dire le théorème des nombres premiers lui-même, lui a échappé. Son encadrement fixe l'ordre de grandeur, pas la constante.

Pour la suite de ce mémoire, seule la majoration $\theta(x) = O(x)$ nous sera utile : c'est elle qui garantira, au chapitre [Le théorème des nombres premiers](#), la convergence de l'intégrale de Newman. C'est donc à cette majoration que ce chapitre est consacré.

2.1 Majoration

2.1.1 Produit des nombres premiers

Proposition 2.1: Majoration du produit des nombres premiers

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\prod_{n+2 \leq p \leq 2n+1} p \leq \binom{2n+1}{n} \leq 4^n$$

Démonstration. On part de la formule du binôme de Newton :

$$2^{2n+1} = (1+1)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k}.$$

Tous les termes de cette somme sont positifs ; en particulier la somme est minorée par ses deux termes centraux $\binom{2n+1}{n}$ et $\binom{2n+1}{n+1}$. Or, par la symétrie du coefficient binomial,

$$\binom{2n+1}{n+1} = \binom{2n+1}{(2n+1)-(n+1)} = \binom{2n+1}{n}.$$

On en déduit

$$2^{2n+1} \geq \binom{2n+1}{n} + \binom{2n+1}{n+1} = 2 \binom{2n+1}{n},$$

d'où, en divisant par 2,

$$\binom{2n+1}{n} \leq 2^{2n} = 4^n.$$

Considérons maintenant la factorisation :

$$\binom{2n+1}{n} = \frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!}.$$

On écrit le produit des entiers de $n+2$ à $2n+1$:

$$\frac{(2n+1)!}{(n+1)!} = \prod_{k=n+2}^{2n+1} k = \left(\prod_{n+2 \leq p \leq 2n+1} p \right) \left(\prod_{\substack{n+2 \leq k \leq 2n+1 \\ k \notin \mathcal{P}}} k \right).$$

Ainsi,

$$\prod_{n+2 \leq p \leq 2n+1} p \mid \frac{(2n+1)!}{(n+1)!} = \binom{2n+1}{n} \cdot n!.$$

Soit $p \in \llbracket n+2, 2n+1 \rrbracket$. Alors $p \nmid n!$, donc $\gcd(p, n!) = 1$.

Par le [lemme de Gauss](#), on obtient :

$$\prod_{n+2 \leq p \leq 2n+1} p \mid \binom{2n+1}{n}.$$

Comme ce produit est un entier positif, on en déduit :

$$\prod_{n+2 \leq p \leq 2n+1} p \leq \binom{2n+1}{n}.$$

■

On peut affiner cette majoration.

Théorème 2.2: Majoration stricte du produit des nombres premiers

$\forall n \in \mathbb{N}^*,$

$$\prod_{p \leq n} p < 4^n$$

Démonstration. Testons sur les premiers entiers :

$$\text{Pour } n = 1 : \prod_{p \leq 1} p = 1 < 4^1$$

$$\text{Pour } n = 2 : \prod_{p \leq 2} p = 2 < 4^2$$

$$\text{Pour } n = 3 : \prod_{p \leq 3} p = 6 < 4^3$$

Soit $n \geq 2$. Supposons pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\prod_{p \leq k} p < 4^k$$

1^{er} cas : $n + 1$ est pair. Comme $n + 1 \geq 3$, $n + 1 \notin \mathcal{P}$. Par hypothèse de récurrence :

$$\prod_{p \leq n+1} p = \prod_{p \leq n} p < 4^n < 4^{n+1}$$

2^e cas : $n + 1$ est impair. Il existe $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $n + 1 = 2k + 1$. Alors,

$$\prod_{p \leq n+1} p = \left(\prod_{p \leq k+1} p \right) \left(\prod_{k+2 \leq p \leq 2k+1} p \right)$$

Par hypothèse de récurrence et le lemme :

$$\prod_{p \leq n+1} p < 4^{k+1} \cdot 4^k = 4^{2k+1} = 4^{n+1}$$

Dans tous les cas :

$$\prod_{p \leq n+1} p < 4^{n+1}$$

Par récurrence on conclut. ■

2.1.2 Majoration de $\pi(x)$

Proposition 2.3

Pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$n^{\frac{\pi(n) - \pi(\sqrt{n})}{2}} < 4^n$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Tout premier p vérifie $p > 1$. Donc

$$\prod_{\sqrt{n} < p \leq n} p \leq \prod_{p \leq n} p < 4^n$$

Or,

$$\prod_{\sqrt{n} < p \leq n} p \geq \prod_{\sqrt{n} < p \leq n} \sqrt{n} = n^{\frac{\pi(n) - \pi(\sqrt{n})}{2}}$$

■

Proposition 2.4

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$

$$\pi(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n} < \frac{n}{\ln(n)}$$

Démonstration. Commençons par remarquer

$$\{p \in [1, \sqrt{n}]\} \subset [1, \sqrt{n}]$$

Donc,

$$\pi(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n}$$

Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x \ln(x)^2 - x^2$ la fonction f est dérivable et :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad f'(x) = \ln(x)^2 + 2 \ln(x) - 2x$$

et

$$f''(x) = 2 \frac{\ln(x)}{x} + 2 \frac{1}{x} - 2 = 2 \frac{\ln(x) + 1 - x}{x} \leq 0$$

Car, $\forall x \geq 0, \ln(x) \leq x - 1$. f' est donc décroissante sur $[1, +\infty[$ et $f'(1) = -2 < 0$, donc f' est négative sur $[1, +\infty[$, ainsi f est décroissante. Or

$$f(2) = 2 \ln(2)^2 - 4 < 0$$

Donc

$$\forall x \in [2, +\infty[, \quad f(x) < 0$$

Par conséquent

$$\forall n \geq 2, \quad n \ln(n)^2 < n^2$$

Par croissance de la racine carrée sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\sqrt{n} \ln(n) < n$$

Ainsi pour tout $n \geq 2$,

$$\sqrt{n} < \frac{n}{\ln(n)}$$

■

Proposition 2.5

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$

$$\pi(n) \leq 4 \frac{n}{\ln(n)}$$

Démonstration. On combine les propositions 2.3 et 2.4. Soit $n \geq 2$ un entier. En appliquant $\ln$ (qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$) à l'inégalité de la proposition 2.3 :

$$\frac{\pi(n) - \pi(\sqrt{n})}{2} \ln(n) < n \ln(4)$$

Donc

$$\pi(n) < \frac{2n \ln(4)}{\ln(n)} + \pi(\sqrt{n})$$

Or, par la proposition 2.4, $\pi(\sqrt{n}) < \frac{n}{\ln(n)}$, donc :

$$\pi(n) < \frac{n}{\ln(n)} (2 \ln(4) + 1)$$

Or, $2 \ln(4) + 1 \leq 4$, donc :

$$\pi(n) \leq 4 \frac{n}{\ln(n)}$$

■

Proposition 2.6: Majoration de $\pi(x)$

Pour tout $x \geq 3$

$$\pi(x) \leq 4 \frac{x}{\ln(x)}$$

Démonstration. La fonction $t \mapsto \frac{t}{\ln(t)}$ est croissante sur $]3, +\infty[$. En l'appliquant à l'inégalité de la proposition 2.5, on trouve bien l'inégalité voulue. ■

2.2 Minoration

Proposition 2.7

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\binom{2n}{n} \leq (2n)^{\pi(2n)}$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par le [Corollaire de Legendre](#) :

$$\binom{2n}{n} = \prod_{p \leq 2n} p^{v_p(\binom{2n}{n})} \leq \prod_{p \leq 2n} 2n \leq (2n)^{\pi(2n)}$$

■

Proposition 2.8

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{2n \ln(2)}{\ln(2n)} - 1 \geq \frac{n \ln(2)}{\ln(2n)}$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \frac{2n \ln(2)}{\ln(2n)} - 1 \geq \frac{n \ln(2)}{\ln(2n)} &\iff 2n \ln(2) - \ln(2n) \geq n \ln(2) \\ &\iff 2n \ln(2) - \ln(2) - \ln(n) - n \ln(2) \geq 0 \\ &\iff (n-1) \ln(2) \geq \ln(n) \\ &\iff 2^{n-1} \geq n \end{aligned}$$

(vraie par récurrence)

■

Proposition 2.9

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n}$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n} &\iff 2^{2n} \leq 4n \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} \\ &\iff 2^{2n-1} \leq 2n \binom{2n-1}{n}\end{aligned}$$

Or,

$$2^{2n-1} = \sum_{0 \leq k \leq 2n-1} \binom{2n-1}{k} \leq \binom{2n-1}{n} \cdot 2n$$

■

Proposition 2.10

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{n \ln(2)}{\ln(2n)} \leq \pi(2n)$$

Démonstration. Par les propositions 2.7 et 2.9 :

$$\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n} \leq (2n)^{\pi(2n)}$$

En appliquant $\ln$ (croissante) et en divisant par $\ln(2n) > 0$:

$$\frac{2n \ln(2)}{\ln(2n)} - 1 \leq \pi(2n)$$

Or, par la proposition 2.8, $\frac{n \ln(2)}{\ln(2n)} \leq \frac{2n \ln(2)}{\ln(2n)} - 1$, d'où :

$$\frac{n \ln(2)}{\ln(2n)} \leq \pi(2n)$$

■

Proposition 2.11

Pour tout $x \geq 3$

$$\frac{\ln(2)}{6} \cdot \frac{x}{\ln(x)} \leq \pi(x)$$

Démonstration. Soit $x \geq 3$. On pose $n = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor \geq 1$

Or,

$$2n = 2 \lfloor \frac{x}{2} \rfloor \leq x$$

Par croissance de π :

$$\pi(x) \geq \pi(2n) \geq \frac{n \ln(2)}{\ln(2n)}$$

Or,

$$\frac{x}{2} - 1 < n \leq \frac{x}{2}$$

donc

$$\ln(x-2) < \ln(2n) \leq \ln(x)$$

ainsi

$$\frac{1}{\ln(2n)} \geq \frac{1}{\ln(x)}$$

Donc

$$\pi(x) \geq \frac{(\frac{x}{2} - 1) \ln(2)}{\ln(x)} \geq \frac{\ln(2)}{6} \cdot \frac{3x - 6}{\ln(x)}$$

Or, $x \geq 3$ donc $3x - 6 \geq x$

On a donc pour tout $x \geq 3$,

$$\frac{\ln(2)}{6} \cdot \frac{x}{\ln(x)} \leq \pi(x)$$

■

2.3 Encadrement de la fonction π

Les deux sections précédentes ont fourni séparément une majoration (Proposition 2.6) et une minoration (Proposition 2.11) de $\pi(x)$ par des multiples de $x/\ln(x)$. En les réunissant, on obtient le résultat central de ce chapitre, dû à Tchebychev : la fonction de comptage π est *exactement* de l'ordre de $x/\ln(x)$.

Théorème 2.12: Encadrement de Tchebychev

Pour tout $x \geq 3$,

$$\frac{\ln(2)}{6} \cdot \frac{x}{\ln(x)} \leq \pi(x) \leq 4 \cdot \frac{x}{\ln(x)}.$$

Démonstration. La majoration est exactement l'énoncé de la Proposition 2.6, et la minoration celui de la Proposition 2.11 ; toutes deux sont valables pour $x \geq 3$. Il suffit donc de les juxtaposer. ■

2.4 La fonction θ

Dans cette section, on s'intéresse à la fonction θ définie par

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \ln(p).$$

Pour estimer la fonction π , on préférera estimer la fonction θ qui, grâce au logarithme, possède une structure multiplicative s'accordant bien avec la manipulation des nombres premiers. Pour ce faire, on dispose du lemme suivant.

Lemme 2.13: Estimer π revient à estimer θ

$$\theta(x) \sim \pi(x) \ln(x)$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. On a tout d'abord la majoration

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \ln(p) \leq \sum_{p \leq x} \ln(x) = \pi(x) \ln(x).$$

Pour la minoration, on restreint la somme aux nombres premiers $p > x^{1-\varepsilon}$:

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \sum_{p \leq x} \ln(p) \geq \sum_{x^{1-\varepsilon} < p \leq x} \ln(p) \\ &\geq \sum_{x^{1-\varepsilon} < p \leq x} \ln(x^{1-\varepsilon}) \\ &= (1 - \varepsilon) \ln(x) \sum_{x^{1-\varepsilon} < p \leq x} 1 \\ &= (1 - \varepsilon) \ln(x) (\pi(x) - \pi(x^{1-\varepsilon})). \end{aligned}$$

Estimons le terme $\pi(x^{1-\varepsilon})$. D'une part,

$$\pi(x^{1-\varepsilon}) \leq x^{1-\varepsilon}.$$

D'autre part, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour x assez grand,

$$\pi(x) \geq C \frac{x}{\ln(x)}.$$

On en déduit que

$$\pi(x^{1-\varepsilon}) = o(\pi(x)).$$

En reportant cette estimation dans la minoration, on obtient

$$\theta(x) \geq (1 - \varepsilon) \ln(x) (\pi(x) - o(\pi(x))) \sim (1 - \varepsilon) \pi(x) \ln(x).$$

On dispose donc de l'encadrement, valable pour tout $\varepsilon > 0$,

$$(1 - \varepsilon) \pi(x) \ln(x) (1 + o(1)) \leq \theta(x) \leq \pi(x) \ln(x).$$

En faisant tendre $\varepsilon \rightarrow 0^+$, on conclut

$$\theta(x) \sim \pi(x) \ln(x).$$

■

Lemme 2.14: $\theta(x) = O(x)$

Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $x \geq 1$,

$$\theta(x) \leq C x.$$

En particulier, $\theta(x) = O(x)$.

Démonstration. **Cas $x \geq 3$.** Puisque $\ln(p) \leq \ln(x)$ pour tout premier $p \leq x$, on a

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \ln(p) \leq \pi(x) \ln(x).$$

En appliquant la majoration de la Proposition 2.6, $\pi(x) \leq 4 \frac{x}{\ln(x)}$, on obtient

$$\theta(x) \leq 4 \frac{x}{\ln(x)} \cdot \ln(x) = 4x.$$

Cas $1 \leq x < 3$. Pour $1 \leq x < 2$, la somme définissant $\theta(x)$ est vide, donc $\theta(x) = 0 \leq 4x$. Pour $2 \leq x < 3$, le seul premier $\leq x$ est 2, donc $\theta(x) = \ln(2) \leq x \leq 4x$.

On conclut que $\theta(x) \leq 4x$ pour tout $x \geq 1$, soit $\theta(x) = O(x)$.

■

Chapitre 3

Les théorèmes de Mertens

Les deux théorèmes de Mertens étudiés dans ce chapitre ne sont pas utilisés dans la preuve du théorème des nombres premiers, donnée au chapitre [Le théorème des nombres premiers](#) par la méthode de Newman. Nous avons tout de même choisi de les traiter. Le premier, qui affirme que $\sum_{p \leq n} \frac{\ln(p)}{p} = \ln(n) + O(1)$, est un résultat intermédiaire classique : il décrit déjà partiellement la répartition des nombres premiers et se démontre avec des outils élémentaires. Le second est plus parlant encore. En établissant que $\sum_{p \leq n} \frac{1}{p} \sim \ln(\ln(n))$, il raffine [le théorème d'Euclide](#) : on sait non seulement qu'il existe une infinité de premiers, mais aussi à quelle vitesse la somme de leurs inverses diverge. Ces deux résultats nous semblaient donc avoir leur place dans un document consacré à l'asymptotique des nombres premiers, même s'ils restent en marge de la démonstration principale.

3.1 Premier théorème de Mertens

Théorème 3.1: 1^{er} Théorème de Mertens

Quand $n \rightarrow +\infty$:

$$\sum_{p \leq n} \frac{\ln(p)}{p} = \ln(n) + O(1)$$

Démonstration. Commençons par rappeler la [formule de Legendre](#) :

$$v_p(n!) = \sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$

On cherche un encadrement de $v_p(n!)$. Grâce à la formule de Legendre et par définition de la partie inférieure on a clairement

$$\frac{n}{p} - 1 < \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \leq \sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \leq \sum_{k \geq 1} \frac{n}{p^k} = \frac{n}{p-1}$$

Le théorème fondamental de l'arithmétique nous permet d'écrire

$$n! = \prod_{p \leq n} p^{v_p(n!)}.$$

En passant au logarithme, on obtient :

$$\ln(n!) = \sum_{p \leq n} v_p(n!) \ln(p).$$

En utilisant l'encadrement de $v_p(n!)$ sur cette dernière égalité on obtient

$$-n + n \sum_{p \leq n} \frac{\ln(p)}{p} \leq \ln(n!) = \sum_{p \leq n} v_p(n!) \ln(p) \leq \sum_{p \leq n} \frac{n}{p-1} \ln(p)$$

Afin d'obtenir la somme qui nous intéresse on peut encore majorer le terme de droite, remarquons que :

$$n \sum_{p \leq n} \frac{\ln(p)}{p(p-1)} = O(n)$$

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq \sum_{p \leq n} \frac{\ln(p)}{p(p-1)} \leq \sum_{p \leq n} \frac{\ln(p)}{p^2} \leq \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{\ln(p)}{p^2}$$

On conclut que $\sum_{p \leq n} \frac{\ln(p)}{p(p-1)}$ converge quand $n \rightarrow +\infty$ par somme de termes positifs.

On se retrouve donc avec l'encadrement :

$$n \sum_{p \leq n} \frac{\ln(p)}{p} + O(n) \leq \ln(n!) \leq n \sum_{p \leq n} \frac{\ln(p)}{p} + O(n)$$

et ainsi

$$\ln(n!) = n \sum_{p \leq n} \frac{\ln(p)}{p} + O(n)$$

Pour conclure on utilise la formule de Stirling qui nous donne $\ln(n!) = n \ln(n) + O(n)$, donc en identifiant $n \ln(n) + O(n)$ à $n \sum_{p \leq n} \frac{\ln(p)}{p} + O(n)$ et en divisant par n on arrive finalement à

$$\sum_{p \leq n} \frac{\ln(p)}{p} = \ln(n) + O(1)$$

■

3.2 Deuxième théorème de Mertens

Théorème 3.2: 2^e Théorème de Mertens

Quand $n \rightarrow +\infty$

$$\sum_{p \leq n} \frac{1}{p} \sim \ln(\ln(n))$$

Démonstration. Commençons par poser

$$a_n = \sum_{p \leq n} \frac{\ln(p)}{p}.$$

Alors

$$\sum_{p \leq n} \frac{1}{p} = \sum_{p \leq n} \frac{\ln(p)}{p} \cdot \frac{1}{\ln(p)} = \sum_{k \leq n} \frac{1}{\ln(k)} (a_k - a_{k-1}).$$

Où $a_k - a_{k-1}$ vaut

$$a_k - a_{k-1} = \begin{cases} \frac{\ln(k)}{k} & \text{si } k \in \mathcal{P}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette manipulation permet de faire intervenir une somme ne portant plus directement sur les nombres premiers. En appliquant alors la transformation d'Abel, on obtient

$$\sum_{p \leq n} \frac{1}{p} = \sum_{k \leq n} \frac{1}{\ln(k)} (a_k - a_{k-1}) = \sum_{k \leq n} \left(\frac{a_k}{\ln(k)} - \frac{a_{k-1}}{\ln(k-1)} + a_{k-1} \underbrace{\left(\frac{1}{\ln(k-1)} - \frac{1}{\ln(k)} \right)}_{\text{terme correctif}} \right).$$

En mettant au même dénominateur, puis en isolant le premier terme de la somme, on obtient

$$\frac{a_n}{\ln(n)} + \sum_{2 \leq k \leq n-1} a_k \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{\ln(k+1) \ln(k)}.$$

D'après [le premier théorème de Mertens](#), on sait que

$$a_k \sim \ln(k).$$

Posons alors

$$b_k = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{\ln(k+1) \ln(k)}.$$

Par développement limité,

$$\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \sim \frac{1}{k}, \quad \ln(k+1) \sim \ln(k),$$

d'où

$$b_k \sim \frac{1}{k \ln^2(k)}.$$

Ainsi,

$$a_k b_k \sim \ln(k) \cdot \frac{1}{k \ln^2(k)} = \frac{1}{k \ln(k)}.$$

On a donc

$$\sum_{p \leq n} \frac{1}{p} = \frac{a_n}{\ln(n)} + \sum_{2 \leq k \leq n-1} a_k b_k.$$

Comme $a_n \sim \ln(n)$, on a

$$\frac{a_n}{\ln(n)} \rightarrow 1,$$

et en particulier

$$\frac{a_n}{\ln(n)} = O(1).$$

Par conséquent,

$$\sum_{p \leq n} \frac{1}{p} = O(1) + \sum_{2 \leq k \leq n-1} \frac{1}{k \ln(k)} + o\left(\sum_{2 \leq k \leq n-1} \frac{1}{k \ln(k)}\right).$$

Enfin, par comparaison série-intégrale,

$$\sum_{2 \leq k \leq n-1} \frac{1}{k \ln(k)} \sim_{n \rightarrow +\infty} \int_2^n \frac{1}{t \ln(t)} dt = [\ln(\ln(t))]_2^n \sim \ln(\ln(n)).$$

Finalement,

$$\sum_{p \leq n} \frac{1}{p} \sim \ln(\ln(n)).$$

■

Chapitre 4

Le théorème des nombres premiers

4.1 Histoire et stratégie

Dans ce chapitre, on cherche à démontrer le fameux théorème des nombres premiers.

Théorème 4.1: Théorème des nombres premiers

$$\pi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{\ln(x)}$$

Ce résultat avait été conjecturé dès la fin du XVIII^e siècle par Gauss et Legendre, à partir de l'observation de tables de nombres premiers. Tchebychev a montré vers 1850 que $\pi(x)$ est bien de l'ordre de $x/\ln(x)$, mais sans parvenir à l'équivalence. Le théorème n'a finalement été démontré qu'en 1896, indépendamment par Hadamard et de la Vallée Poussin, à l'aide de la fonction ζ de Riemann.

Il existe aujourd'hui plusieurs démonstrations de ce théorème. Les preuves originales de 1896 reposent sur l'analyse complexe et demandent des estimations assez techniques sur les zéros de ζ . En 1949, Erdős et Selberg en ont donné une preuve dite élémentaire, qui n'utilise pas l'analyse complexe, mais qui est en contrepartie longue et calculatoire. Nous avons choisi de présenter une troisième voie, due à Newman (1980) : elle fait elle aussi appel à l'analyse complexe, mais n'en utilise que des outils simples, pour l'essentiel le théorème de Cauchy. C'est, à notre sens, la démonstration la plus adaptée à un mémoire de licence : elle reste courte tout en évitant les estimations délicates des preuves de 1896.

L'idée est de ne pas travailler directement avec π , mais avec la fonction θ introduite au chapitre [Le théorème de Tchebychev](#). On établit d'abord que l'équivalence $\theta(x) \sim x$ entraîne le théorème des nombres premiers. On ramène ensuite cette équivalence à la convergence d'une intégrale, que l'on relie enfin à la fonction ζ pour conclure.

4.2 Le lemme de Newman

La stratégie adoptée consiste à ramener le théorème des nombres premiers à un énoncé portant sur la seule fonction θ . Deux résultats établis au chapitre 2 interviennent de façon essentielle dans cette démarche ; nous les rappelons ici.

Le premier relie θ et π .

Lemme 4.2: Lien entre θ et π (rappel)

$$\theta(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \pi(x) \ln(x).$$

C'est ce lemme qui ramène tout le problème à la fonction θ : si l'on établit l'équivalence $\theta(x) \sim x$, alors

$$\pi(x) \ln(x) \sim \theta(x) \sim x,$$

et donc $\pi(x) \sim x/\ln(x)$. L'essentiel de ce chapitre est par conséquent consacré à la preuve de l'équivalence $\theta(x) \sim x$.

Le second résultat fournit un contrôle de la croissance de θ . Il n'intervient pas dans l'implication ci-dessus, mais plus loin dans le chapitre : c'est lui qui assurera la convergence de l'intégrale de Newman, c'est-à-dire l'hypothèse du lemme central énoncé ci-dessous.

Lemme 4.3: $\theta(x) = O(x)$ (rappel)

Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $x \geq 1$,

$$\theta(x) \leq Cx.$$

Ces deux rappels en main, nous pouvons énoncer le résultat clé de ce chapitre, dû à Newman.

Lemme 4.4: Lemme de Newman

Si

$$\int_1^{+\infty} \frac{\theta(x) - x}{x^2} dx$$

converge, alors

$$\theta(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x.$$

Démonstration. Supposons que $\int_1^{+\infty} \frac{\theta(x) - x}{x^2} dx$ converge, et montrons que

$$\theta(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{\theta(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$$

Raisonnons par l'absurde en supposant que $\frac{\theta(x)}{x}$ ne tend pas vers 1. Il existe alors

$\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall N \geq 0, \exists x \geq N \quad \text{tel que} \quad \left| \frac{\theta(x)}{x} - 1 \right| \geq \varepsilon.$$

On peut donc construire une suite $(x_n)_n$ telle que $x_n \rightarrow +\infty$ et

$$\left| \frac{\theta(x_n)}{x_n} - 1 \right| \geq \varepsilon \quad \text{pour tout } n.$$

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que l'une des deux conditions suivantes est réalisée pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- **Cas 1** : $\frac{\theta(x_n)}{x_n} - 1 \geq \varepsilon$, soit $\theta(x_n) \geq (1 + \varepsilon)x_n$;
- **Cas 2** : $\frac{\theta(x_n)}{x_n} - 1 \leq -\varepsilon$, soit $\theta(x_n) \leq (1 - \varepsilon)x_n$.

Cas 1. L'intégrale convergeant, le critère de Cauchy donne

$$\int_{x_n}^{(1+\varepsilon)x_n} \frac{\theta(x) - x}{x^2} dx = \int_1^{(1+\varepsilon)x_n} \frac{\theta(x) - x}{x^2} dx - \int_1^{x_n} \frac{\theta(x) - x}{x^2} dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Or θ est croissante, donc pour tout $x \in [x_n, (1 + \varepsilon)x_n]$ on a $\theta(x) \geq \theta(x_n) \geq (1 + \varepsilon)x_n$. Ainsi

$$\begin{aligned} \int_{x_n}^{(1+\varepsilon)x_n} \frac{\theta(x) - x}{x^2} dx &\geq \int_{x_n}^{(1+\varepsilon)x_n} \frac{\theta(x_n) - x}{x^2} dx \\ &\geq \int_{x_n}^{(1+\varepsilon)x_n} \frac{(1 + \varepsilon)x_n - x}{x^2} dx \\ &= (1 + \varepsilon)x_n \left(\frac{1}{x_n} - \frac{1}{(1 + \varepsilon)x_n} \right) - \ln(1 + \varepsilon) \\ &= ((1 + \varepsilon) - 1) - \ln(1 + \varepsilon) \\ &= \varepsilon - \ln(1 + \varepsilon) > 0. \end{aligned}$$

On obtient une contradiction : la même intégrale tend vers 0 tout en restant minorée par la constante strictement positive $\varepsilon - \ln(1 + \varepsilon)$. Le cas 1 est donc impossible.

Cas 2. De même, θ étant croissante, pour tout $x \in [(1-\varepsilon)x_n, x_n]$ on a $\theta(x) \leq \theta(x_n) \leq (1-\varepsilon)x_n$, d'où

$$\begin{aligned}
\int_{(1-\varepsilon)x_n}^{x_n} \frac{\theta(x) - x}{x^2} dx &\leq \int_{(1-\varepsilon)x_n}^{x_n} \frac{\theta(x_n) - x}{x^2} dx \\
&\leq \int_{(1-\varepsilon)x_n}^{x_n} \frac{(1-\varepsilon)x_n - x}{x^2} dx \\
&= (1-\varepsilon)x_n \left(\frac{1}{(1-\varepsilon)x_n} - \frac{1}{x_n} \right) + \ln(1-\varepsilon) \\
&= (1 - (1-\varepsilon)) + \ln(1-\varepsilon) \\
&= \varepsilon + \ln(1-\varepsilon) < 0.
\end{aligned}$$

Là encore, le critère de Cauchy donne

$$\int_{(1-\varepsilon)x_n}^{x_n} \frac{\theta(x) - x}{x^2} dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

ce qui contredit la majoration par la constante strictement négative $\varepsilon + \ln(1-\varepsilon)$. Le cas 2 est donc lui aussi impossible.

Conclusion. Les deux cas étant exclus, l'hypothèse de l'absurde est fausse. On a donc bien

$$\theta(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x.$$

■

4.3 Lien entre ζ et l'intégrale de Newman

Dans cette section, nous relierons l'intégrale de Newman

$$\int_1^{+\infty} \frac{\theta(x) - x}{x^{1+s}} dx$$

à la fonction ζ de Riemann. Puisque $\theta(x) = O(x)$, on a $\theta(x) - x = O(x)$, donc

$$\left| \frac{\theta(x) - x}{x^{1+s}} \right| = O\left(x^{-\Re(s)}\right),$$

ce qui assure la convergence de l'intégrale pour $\Re(s) > 1$.

Rappelons le produit eulérien et sa dérivée logarithmique :

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}, \quad \frac{\zeta'}{\zeta}(s) = - \sum_p \frac{\ln p}{p^s - 1}.$$

On développe $\theta(x) = \sum_{p \leq x} \ln p$ et on échange somme et intégrale par le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{\theta(x) - x}{x^{s+1}} dx &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{s+1}} \sum_{p \leq x} \ln p dx - \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^s} \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{s+1}} \sum_p \ln p \mathbb{K}_{[p, +\infty[}(x) dx - \left[\frac{x^{1-s}}{1-s} \right]_1^{+\infty} \\
&\stackrel{\text{Fubini}}{=} \sum_p \ln p \int_p^{+\infty} \frac{dx}{x^{s+1}} - \frac{1}{s-1} \\
&= \frac{1}{s} \sum_p \frac{\ln p}{p^s} - \frac{1}{s-1}.
\end{aligned}$$

En multipliant par s puis en ajoutant $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\zeta'}{\zeta}(s) + s \int_1^{+\infty} \frac{\theta(x) - x}{x^{s+1}} dx &= - \sum_p \frac{\ln p}{p^s - 1} + \sum_p \frac{\ln p}{p^s} - 1 - \frac{1}{s-1} \\
&= -1 - \frac{1}{s-1} + \sum_p \ln p \left(\frac{1}{p^s} - \frac{1}{p^s - 1} \right) \\
&= -1 - \frac{1}{s-1} - \sum_p \frac{\ln p}{p^s(p^s - 1)}.
\end{aligned}$$

Posons $\psi(s) = \sum_p \frac{\ln p}{p^s(p^s - 1)}$. Cette série converge absolument pour $\Re(s) > \frac{1}{2}$, donc ψ est holomorphe sur ce demi-plan. On peut ainsi réécrire :

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \frac{1}{s-1} + \psi(s) + 1 = -s \int_1^{+\infty} \frac{\theta(x) - x}{x^{s+1}} dx.$$

Il reste à montrer que le membre de gauche est holomorphe en $s = 1$. La fonction ζ a un pôle simple en $s = 1$, de développement de Laurent

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + a_0 + a_1(s-1) + \cdots, \quad \zeta'(s) = \frac{-1}{(s-1)^2} + a_1 + \cdots$$

En multipliant numérateur et dénominateur par $(s-1)^2$, on calcule :

$$\begin{aligned}
\frac{\zeta'}{\zeta}(s) &= \frac{-1 + a_1(s-1)^2 + \dots}{(s-1) + a_0(s-1)^2 + \dots} \\
&= \frac{1}{s-1} \underbrace{\left(\frac{-1 + a_1(s-1)^2 + \dots}{1 + a_0(s-1) + \dots} \right)}_{=: f(s)} \\
&= \frac{1}{s-1} (-1 + b_1(s-1) + \dots) \\
&= \frac{-1}{s-1} + \text{fonction holomorphe,}
\end{aligned}$$

où f est holomorphe au voisinage de $s=1$ (avec $f(1) = -1$). Ainsi

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \frac{1}{s-1}$$

est holomorphe en $s=1$. Puisque ψ l'est aussi pour $\Re(s) > \frac{1}{2}$, le membre de gauche est holomorphe en $s=1$.

Les seuls points susceptibles de faire diverger cette expression sont donc les zéros de ζ sur la droite $\Re(s) = 1$. On veut montrer que ζ n'en possède aucun, autrement dit :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad \zeta(1+it) \neq 0.$$

4.4 Non annulation de Zêta

La démonstration du résultat énoncé ci-dessus passe par un lemme

Lemme 4.5

Pour tout $\sigma \in]1, +\infty[$ et tout $t \in \mathbb{R}^*$,

$$\left| \zeta(\sigma)^3 \zeta(\sigma+it)^4 \zeta(\sigma+2it) \right| \geq 1.$$

Démonstration. Soit $\sigma \in]1, +\infty[$ et $t \in \mathbb{R}^*$.

On sait, par la formule d'Euler, que

$$\begin{aligned}
\zeta(\sigma) &= \prod_p \frac{1}{1 - p^{-\sigma}}, \\
\zeta(\sigma+it) &= \prod_p \frac{1}{1 - p^{-\sigma-it}}, \\
\zeta(\sigma+2it) &= \prod_p \frac{1}{1 - p^{-\sigma-2it}},
\end{aligned}$$

ces trois produits étant licites car $\Re(\sigma) = \Re(\sigma + it) = \Re(\sigma + 2it) = \sigma > 1$. D'où

$$\zeta(\sigma)^3 \zeta(\sigma + it)^4 \zeta(\sigma + 2it) = \prod_p \frac{1}{(1 - p^{-\sigma})^3 (1 - p^{-\sigma - it})^4 (1 - p^{-\sigma - 2it})}.$$

Soit p un nombre premier. Le module du produit ci-dessus valant $\prod_p 1/|(1 - p^{-\sigma})^3 (1 - p^{-\sigma - it})^4 (1 - p^{-\sigma - 2it})|$, et un produit de réels ≥ 1 étant ≥ 1 , il suffit de montrer que

$$|(1 - p^{-\sigma})^3 (1 - p^{-\sigma - it})^4 (1 - p^{-\sigma - 2it})| \leq 1. \quad (*)$$

Posons $n = p^{-\sigma}$; alors $0 < n < 1$ car $p \geq 2$ et $\sigma > 1$. Posons aussi $\varphi = -t \ln(p)$, qui appartient à $\mathbb{R}^*$ car $t \neq 0$ et $p \neq 1$. Comme $p^{-\sigma - it} = n e^{i\varphi}$ et $p^{-\sigma - 2it} = n e^{2i\varphi}$, (*) équivaut à

$$|(1 - n)^3 (1 - n e^{i\varphi})^4 (1 - n e^{2i\varphi})| \leq 1,$$

qui équivaut, par croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$, à

$$3 \ln |1 - n| + 4 \ln |1 - n e^{i\varphi}| + \ln |1 - n e^{2i\varphi}| \leq 0.$$

On note, pour tout $\gamma \in \mathbb{C}$ tel que $|\gamma| < 1$,

$$L(1 - \gamma) = - \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\gamma^m}{m}.$$

La fonction L est un logarithme, au sens où $\exp(L(1 - \gamma)) = 1 - \gamma$ pour tout $|\gamma| < 1$. En effet, pour un tel γ ,

$$|1 - \gamma| = |\exp(L(1 - \gamma))| = \exp(\Re L(1 - \gamma)), \quad \text{donc} \quad \ln |1 - \gamma| = \Re L(1 - \gamma).$$

Comme $n < 1$, on peut appliquer ceci à n , $n e^{i\varphi}$ et $n e^{2i\varphi}$; ainsi (*) équivaut à

$$\Re(3 L(1 - n) + 4 L(1 - n e^{i\varphi}) + L(1 - n e^{2i\varphi})) \leq 0.$$

En développant L en série, (*) équivaut à

$$\Re\left(- \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m} (3n^m + 4(n e^{i\varphi})^m + (n e^{2i\varphi})^m)\right) \leq 0,$$

soit, en prenant la partie réelle,

$$- \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{n^m}{m} (3 + 4 \cos(m\varphi) + \cos(2m\varphi)) \leq 0.$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$; (*) équivaut donc à

$$2 \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{n^m}{m} \left(1 + 2\cos(m\varphi) + \cos^2(m\varphi)\right) \geq 0,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{n^m}{m} \left(1 + \cos(m\varphi)\right)^2 \geq 0.$$

Cette dernière inégalité est vérifiée, ses termes étant tous positifs. En remontant les équivalences, on obtient le lemme. ■

Théorème 4.6: Non-annulation de ζ sur la droite $\Re(s) = 1$

Pour tout $t \in \mathbb{R}^$, on a $\zeta(1 + it) \neq 0$.*

Démonstration. Utilisons le lemme 4.5 et raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe $t \in \mathbb{R}^*$ tel que $\zeta(1 + it) = 0$.

Fixons un tel t et estimons, lorsque $\sigma \rightarrow 1^+$, les trois facteurs du produit du lemme. On rappelle que ζ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, avec un pôle simple en $s = 1$.

— *Facteur $\zeta(\sigma)$.* Le pôle étant simple, $\zeta(\sigma) = \frac{1}{\sigma - 1} + O(1)$, donc

$$\zeta(\sigma) \underset{\sigma \rightarrow 1^+}{=} O\left(\frac{1}{\sigma - 1}\right).$$

— *Facteur $\zeta(\sigma + it)$.* Comme $t \neq 0$, le point $1 + it$ est distinct de 1, donc ζ y est holomorphe ; par hypothèse elle s'y annule, son développement en ce point commence donc au moins à l'ordre 1 :

$$\zeta(1 + it + z) \underset{z \rightarrow 0}{=} O(z).$$

En particulier, pour $\sigma \rightarrow 1^+$,

$$\zeta(\sigma + it) = \zeta(1 + it + (\sigma - 1)) \underset{\sigma \rightarrow 1^+}{=} O(\sigma - 1).$$

— *Facteur $\zeta(\sigma + 2it)$.* Comme $t \neq 0$, le point $1 + 2it$ est lui aussi distinct de 1, donc ζ y est holomorphe, donc bornée au voisinage :

$$\zeta(\sigma + 2it) \underset{\sigma \rightarrow 1^+}{=} O(1).$$

En élevant ces estimations aux puissances voulues et en les multipliant,

$$\left| \zeta(\sigma)^3 \zeta(\sigma + it)^4 \zeta(\sigma + 2it) \right| \underset{\sigma \rightarrow 1^+}{=} O\left(\frac{1}{(\sigma - 1)^3}\right) \cdot O((\sigma - 1)^4) \cdot O(1) = O(\sigma - 1).$$

Le membre de gauche tend donc vers 0 lorsque $\sigma \rightarrow 1^+$. Or, d'après le lemme 4.5, il est minoré par 1 pour tout $\sigma > 1$: c'est une contradiction.

Il n'existe donc aucun $t \in \mathbb{R}^*$ tel que $\zeta(1 + it) = 0$, ce qui établit le théorème. ■

On introduit la fonction de Newman N , définie pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s) > 1$ par

$$N(s) = \int_1^{+\infty} \frac{\theta(x) - x}{x^{s+1}} dx.$$

L'intégrale converge sur ce demi-plan car $\theta(x) = O(x)$ entraîne $\left| \frac{\theta(x) - x}{x^{s+1}} \right| = O(x^{-\Re(s)})$.

Théorème 4.7: Prolongement de N

La fonction N définie sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 1\}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur l'ouvert

$$\Omega' = \Omega \cap \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > \frac{1}{2} \right\}$$

où $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \zeta(z) \neq 0\} \cup \{1\}$.

Démonstration. $\{z \in \mathbb{C} \mid \zeta(z) \neq 0\}$ est ouvert et ζ ne s'annule pas au voisinage de 1, donc Ω est ouvert. Par intersection d'ouverts, Ω' est ouvert.

Pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s) > 1$:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1} + \psi(s) + 1 = -s \int_1^{+\infty} \frac{\theta(x) - x}{x^{s+1}} dx.$$

Par le théorème 4.6 :

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) \geq 1\} \subset \Omega'$$

et $s \mapsto \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1}$ est holomorphe sur Ω' et $s \mapsto \psi(s) + 1$ également.

On conclut que $s \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{\theta(x) - x}{x^{s+1}} dx$ se prolonge.

Comme

$$\int_1^{+\infty} \frac{\theta(x) - x}{x^{s+1}} dx = -\frac{1}{s} \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1} + \psi(s) + 1 \right),$$

on conclut. ■

4.5 Théorème taubérien de Newman

Toute la stratégie du chapitre repose, en dernier lieu, sur un résultat d'analyse complexe dû à Newman, que l'on appelle parfois *théorème analytique* ou *théorème taubérien*. Il transforme une information de nature *holomorphe* (le prolongement d'une transformée de Laplace au-delà de son demi-plan de convergence) en une information de nature *analytique*

réelle (la convergence d'une intégrale). Appliqué à la fonction θ , c'est lui qui fournira la convergence de l'intégrale de Newman, et donc, par le lemme 4.4, l'équivalence $\theta(x) \sim x$.

Théorème 4.8: Théorème taubérien de Newman

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et localement intégrable. On pose, pour $\Re(s) > 0$,

$$g(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

On suppose que g se prolonge en une fonction holomorphe sur un ouvert Ω contenant le demi-plan fermé $\{\Re(s) \geq 0\}$. Alors l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt$$

converge, et sa valeur est $g(0)$.

Démonstration. **Notations.** On note

$$M = \sup_{t \geq 0} |f(t)| < +\infty,$$

qui est fini car f est bornée. Pour $\lambda > 0$, on introduit la troncature

$$h(s) = \int_0^\lambda f(t) e^{-st} dt.$$

Pour chaque λ fixé, la fonction h est *entière* (intégrale sur un segment d'une fonction entière de s), tandis que g n'est holomorphe que sur Ω . Montrer le théorème revient à établir que

$$h(0) = \int_0^\lambda f(t) dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} g(0).$$

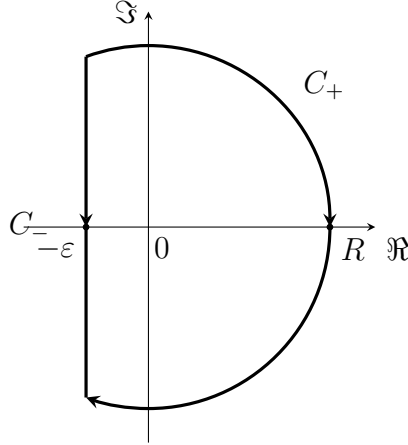
Le contour. Soit $R > 0$ et soit $\varepsilon > 0$ (que l'on choisira plus loin assez petit). On considère le bord orienté $C = C_{\varepsilon, R}$ de la région

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R \text{ et } \Re(z) \geq -\varepsilon\},$$

parcouru dans le sens trigonométrique, et on le découpe en

$$C = C_+ \cup C_-,$$

où $C_+ = C \cap \{\Re(z) > 0\}$ est le demi-cercle de droite $|z| = R$, $\Re(z) \geq 0$, et $C_- = C \cap \{\Re(z) \leq 0\}$ est la partie gauche (deux arcs de cercle complétés par le segment vertical $\Re(z) = -\varepsilon$).



La fonction $g - h$ étant holomorphe à l'intérieur de C et sur C (pourvu que ε soit assez petit pour que C reste dans Ω), la formule intégrale de Cauchy, appliquée au point 0 avec le noyau auxiliaire $e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right)$ (régulier sur C et de résidu 1 en 0), donne

$$2\pi i (g(0) - h(0)) = \int_C (g(z) - h(z)) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) dz.$$

Le facteur $\frac{z}{R^2}$, qui s'annule en 0 et ne modifie donc pas le résidu, est l'astuce de Newman : sur le cercle $|z| = R$ on a $\left| \frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right| = \left| \frac{\bar{z} + z}{R^2} \right| = \frac{2|\Re(z)|}{R^2}$, ce qui rend le noyau petit là où f est mal contrôlée. Pour alléger, on pose

$$u(z) = e^{\lambda z} h(z) \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right), \quad v(z) = e^{\lambda z} g(z) \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right),$$

et l'on note $x = \Re(z)$ dans toute la suite.

Majoration sur C_+ . On majore $u - v$ sur le demi-cercle de droite $C_+ = \{|z| = R, x \geq 0\}$. Pour un tel z , on a $z\bar{z} = R^2$, donc

$$\left| \frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right| = \left| \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} + \frac{z}{R^2} \right| = \left| \frac{\bar{z} + z}{R^2} \right| = \frac{2x}{R^2}.$$

Par ailleurs, en revenant aux intégrales définissant g et h ,

$$|g(z) - h(z)| = \left| \int_{\lambda}^{+\infty} f(t) e^{-zt} dt \right| \leq M \int_{\lambda}^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{M}{x} e^{-\lambda x} \quad (x > 0).$$

En multipliant par $|e^{\lambda z}| = e^{\lambda x}$ et par le module du noyau,

$$|(u - v)(z)| \leq \frac{M}{x} e^{-\lambda x} \cdot e^{\lambda x} \cdot \frac{2x}{R^2} = \frac{2M}{R^2}.$$

D'où, C_+ étant de longueur $\ell(C_+) = \pi R$,

$$\left| \int_{C_+} (u - v) \right| \leq \ell(C_+) \max_{z \in C_+} |(u - v)(z)| \leq \pi R \cdot \frac{2M}{R^2} = \frac{2\pi M}{R}.$$

On a donc

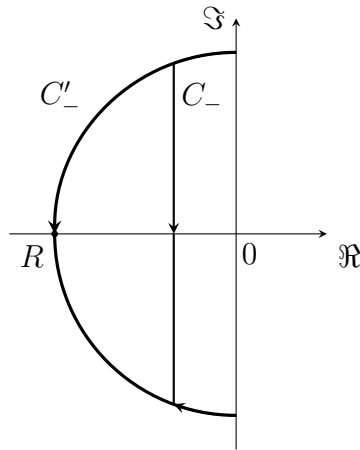
$$\left| \int_{C_+} (u - v)(z) dz \right| \leq \frac{2\pi M}{R} \quad (4.1)$$

Majoration de $\int_{C_-} u$. Comme $u(z) = e^{\lambda z} h(z) \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right)$ et que h est entière, la fonction u est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$. On peut donc déformer C_- en le demi-cercle gauche

$$C'_- = \left\{ |z| = R, x \leq 0 \right\},$$

ils sont homotopes dans $\mathbb{C}^*$. Donc

$$\int_{C_-} u(z) dz = \int_{C'_-} u(z) dz.$$



On va majorer $|u(z)|$ sur C'_- . Soit $z \in C'_-$. Comme $x = \Re(z) < 0$,

$$|h(z)| = \left| \int_0^\lambda f(t) e^{-tx} dt \right| \leq \int_0^\lambda M e^{-tx} dt = M \left[\frac{e^{-tx}}{-x} \right]_0^\lambda = M \frac{e^{-\lambda x} - 1}{-x} \quad (\geq 0).$$

Finalement,

$$|u(z)| \leq |e^{\lambda z}| \cdot M \frac{e^{-\lambda x} - 1}{-x} \left| \frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right| = e^{\lambda x} M \frac{e^{-\lambda x} - 1}{-x} \left| \frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right|.$$

Comme on est sur C'_- , $z\bar{z} = R^2$, donc $\left| \frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right| = \left| \frac{\bar{z} + z}{R^2} \right| = \frac{-2x}{R^2}$, et

$$|u(z)| \leq M \frac{e^{-\lambda x} - 1}{-x} \cdot e^{\lambda x} \cdot \frac{-2x}{R^2} = \frac{2M}{R^2} (1 - e^{\lambda x}) \leq \frac{2M}{R^2},$$

la dernière inégalité venant de $0 \leq 1 - e^{\lambda x} \leq 1$ pour $x \leq 0$. La longueur de C'_- valant πR ,

on a donc

$$\left| \int_{C_-} u(z) dz \right| = \left| \int_{C'_-} u(z) dz \right| \leq \ell(C'_-) \times \max_{z \in C'_-} |u(z)| = \pi R \times \frac{2M}{R^2} = \frac{2\pi M}{R} \quad (4.2)$$

Majoration de $\int_{C_-} v$. Cette fois, g n'étant holomorphe que sur Ω , on ne peut pas raisonner par homotopie. Pour tout $R > 0$, il existe $\alpha_R > 0$ tel que

$$[-\alpha_R, 0] \times [-R, R] \subseteq \Omega,$$

donc il existe $G(R) > 0$ tel que

$$\forall z \in [-\alpha_R, 0] \times [-R, R], \quad |g(z)| \leq G(R)$$

(g étant continue sur ce compact). On suppose désormais $0 < \varepsilon < \alpha_R$ et l'on découpe C_- en trois morceaux : le segment vertical S d'abscisse $\Re(z) = -\varepsilon$, et les deux arcs C_1, C_2 du cercle $|z| = R$ qui le relient à l'axe imaginaire.

Sur S . Si $z \in S$, alors $x = -\varepsilon$, donc $|e^{\lambda z}| = e^{-\lambda \varepsilon}$, $|g(z)| \leq G(R)$, et $\left| \frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right| \leq \frac{1}{|z|} + \frac{|z|}{R^2} \leq \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{R}$ puisque $\varepsilon \leq |z| \leq R$. Ainsi

$$|v(z)| = |e^{\lambda z}| |g(z)| \left| \frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right| \leq e^{-\lambda \varepsilon} G(R) \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{R} \right),$$

et comme $\ell(S) \leq 2R$,

$$\left| \int_S v(z) dz \right| \leq \ell(S) \times \max_{z \in S} |v(z)| \leq 2R e^{-\lambda \varepsilon} G(R) \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{R} \right) \leq 2G(R) \left(\frac{R}{\varepsilon} + 1 \right) e^{-\lambda \varepsilon}.$$

Sur C_1 et C_2 . Si z est sur l'un de ces arcs, $|z| = R$ et $-\varepsilon \leq x \leq 0$, donc $|e^{\lambda z}| = e^{\lambda x} \leq 1$, $|g(z)| \leq G(R)$, et, comme à l'étape ①, $\left| \frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right| = \left| \frac{\bar{z}+z}{R^2} \right| = \frac{-2x}{R^2} \leq \frac{2\varepsilon}{R^2}$. D'où

$$|v(z)| \leq e^{\lambda \Re(z)} G(R) \frac{2\varepsilon}{R^2} \leq 2G(R) \frac{\varepsilon}{R^2},$$

puis, chaque arc étant de longueur au plus $\frac{\pi}{2}R$,

$$\left| \int_{C_i} v(z) dz \right| \leq 2G(R) \frac{\varepsilon}{R^2} \times \ell(C_i) \leq 2G(R) \frac{\varepsilon}{R^2} \cdot \frac{\pi}{2}R \leq 2G(R) \frac{\varepsilon}{R} \quad (i = 1, 2).$$

En regroupant les deux arcs et le segment,

$$\left| \int_{C_-} v(z) dz \right| \leq 2G(R) \left[\left(\frac{R}{\varepsilon} + 1 \right) e^{-\lambda \varepsilon} + \frac{\varepsilon}{R} \cdot 2 \right] \quad (4.3)$$

inégalité valable pour tout $R > 0$ et tout $0 < \varepsilon < \alpha_R$.

Conclusion. En séparant les chemins dans l'identité de Cauchy,

$$2\pi i(g(0) - h(0)) = \int_{C_{\varepsilon,R}} (u - v) = \int_{C_+} (u - v) + \int_{C_-} u - \int_{C_-} v.$$

En prenant les modules et en utilisant (4.1), (4.2) et (4.3),

$$|2\pi(g(0) - h(0))| \leq \frac{4\pi M}{R} + 2G(R) \left[4 \frac{\varepsilon}{R} + \left(\frac{R}{\varepsilon} + 1 \right) e^{-\lambda\varepsilon} \right].$$

Avec $h(0) = \int_0^\lambda f(t)dt$, en divisant par 2π ,

$$\left| \int_0^\lambda f(t) dt - g(0) \right| \leq \frac{2M}{R} + \frac{G(R)}{\pi} \left[4 \frac{\varepsilon}{R} + \left(\frac{R}{\varepsilon} + 1 \right) e^{-\lambda\varepsilon} \right].$$

Soit $\eta > 0$. On prend $R > 0$ tel que

$$\frac{2M}{R} < \frac{\eta}{3},$$

puis on prend $\varepsilon \in]0, \alpha_R[$ tel que

$$\frac{G(R)}{\pi} \cdot 4 \frac{\varepsilon}{R} < \frac{\eta}{3}$$

(R et $G(R)$ étant désormais fixés). Alors

$$\frac{G(R)}{\pi} \left(\frac{R}{\varepsilon} + 1 \right) e^{-\lambda\varepsilon} \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc pour λ assez grand, disons $\lambda \geq \lambda_0$, ce dernier terme est $< \frac{\eta}{3}$. On a donc, pour tout $\lambda \geq \lambda_0$,

$$\left| \int_0^\lambda f(t) dt - g(0) \right| \leq \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} = \eta.$$

Donc

$$\int_0^\lambda f(t) dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} g(0),$$

c'est-à-dire $\int_0^\lambda f(t)dt$ converge. ■

4.6 Démonstration du théorème des nombres premiers

On peut désormais mettre bout à bout tous les résultats démontrés jusqu'à présent pour démontrer le théorème des nombres premiers

Théorème 4.9: Théorème des nombres premiers

$$\pi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{\ln(x)}$$

Démonstration. On rappelle, grâce au théorème 4.7 de prolongement de N , que

$$N : s \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{\theta(x) - x}{x^{s+1}} dx = \int_0^{+\infty} (\theta(e^t)e^{-t} - 1) e^{-t(s-1)} dt$$

se prolonge en une fonction holomorphe sur un ouvert $\Omega \supseteq \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) \geq 1\}$.

Donc :

$$g(z) = \int_0^{+\infty} (\theta(e^t)e^{-t} - 1) e^{-tz} dt$$

est définie sur $\{\Re(z) > 0\}$ et se prolonge en une fonction holomorphe sur $\Omega' \supseteq \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) \geq 0\}$, et $f : t \mapsto \theta(e^t)e^{-t} - 1$ est bornée car $\theta(x) = O(x)$ d'après le lemme 2.14.

Donc le théorème taubérien 4.8 s'applique et donne la convergence de

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} (\theta(e^t)e^{-t} - 1) dt.$$

Avec le changement de variables $x = e^t$ on a $dx = x dt$, ainsi

$$\int_0^{+\infty} (\theta(e^t)e^{-t} - 1) dt \text{ converge} \iff \int_1^{+\infty} \frac{\theta(x) - x}{x^2} dx \text{ converge.}$$

Par le Lemme de Newman, on a donc

$$\theta(x) \sim x,$$

et par le lemme 2.13 : $\theta(x) \sim \pi(x) \ln(x)$, on a alors

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}.$$

■

Conclusion

Au terme de ce mémoire, nous avons démontré le théorème des nombres premiers :

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \quad (x \rightarrow +\infty).$$

La stratégie adoptée n'a pas consisté à étudier π directement, mais à passer par la fonction auxiliaire θ , somme des $\ln p$ sur les premiers $p \leq x$. Le logarithme transforme les produits de nombres premiers en sommes, ce qui rend θ nettement plus maniable que π , tandis que l'équivalence $\theta(x) \sim \pi(x) \ln x$ garantit qu'estimer l'une revient à estimer l'autre. Tout le travail s'est donc reporté sur la fonction θ .

Le chapitre consacré à Tchebychev nous a d'abord fourni un encadrement de $\pi(x)$ par des multiples de $x/\ln x$, obtenu par des moyens entièrement élémentaires : étude arithmétique des coefficients binomiaux et formule de Legendre. De cet encadrement, nous n'avons retenu pour la suite que la majoration $\theta(x) = O(x)$, qui s'est révélée être le seul ingrédient réellement nécessaire à la preuve finale.

Le cœur de la démonstration a ensuite reposé sur l'analyse complexe, dans la version économe due à Newman. L'idée maîtresse est de relier la fonction θ à la fonction ζ de Riemann. Deux résultats se sont avérés décisifs : la non-annulation de ζ sur la droite $\Re(s) = 1$, et un théorème taubérien qui transforme une information de nature holomorphe en la convergence d'une intégrale réelle. De cette convergence, le lemme de Newman a déduit l'équivalence $\theta(x) \sim x$, dont découle aussitôt le théorème des nombres premiers. Cette approche, qui n'utilise de l'analyse complexe que ses outils les plus simples, nous a paru particulièrement adaptée à un mémoire de licence : elle atteint un résultat profond sans recourir aux estimations délicates des preuves historiques de 1896.

Au-delà de la preuve elle-même, ce travail met en lumière une idée centrale de la théorie analytique des nombres : la répartition des nombres premiers est gouvernée par le comportement de la fonction ζ . Nous n'en avons exploité qu'une infime partie, à savoir sa non-annulation sur une seule droite. Une étude plus fine de la localisation de ses zéros permettrait de préciser la vitesse de convergence, question intimement liée à l'hypothèse de Riemann, qui demeure aujourd'hui l'un des grands problèmes ouverts des mathématiques. Le théorème établi dans ce mémoire n'est donc pas un aboutissement, mais une première porte ouverte sur un domaine encore largement actif.

Bibliographie

- [1] D. J. Newman. Simple analytic proof of the prime number theorem. *The American Mathematical Monthly*, 1980.
- [2] Don Zagier. Newman’s short proof of the prime number theorem. *The American Mathematical Monthly*, pages 705–708, 1997.
- [3] Gérald Tenenbaum and Michel Mendès France. *Les nombres premiers, entre l’ordre et le chaos*. Dunod, 2nd edition, 2014.
- [4] Xavier Gourdon. *Analyse*. Ellipses, 3rd edition, 2020.
- [5] Ferdinand Jacobé de Naurois. Répartition des nombres premiers. *TIPE*, 2020.
- [6] Nicolas Radu. Mathraining – théorie des nombres. <https://www.mathraining.be/sections/3>, 2014.
- [7] X-ENS. Sujet de mathématiques – filière mp-mpi. Épreuve écrite n°1, 2024.
- [8] Centrale-Supélec. Mathématiques 1 – filière mp, mpi. Épreuve écrite, 2025.
- [9] Wikipedia. Théorème des nombres premiers. https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_des_nombres_preiers, 2026.
- [10] Wikipedia. Formule de legendre. https://fr.wikipedia.org/wiki/Formule_de_Legendre, 2026.
- [11] David Louapre. Les nombres premiers. <https://www.youtube.com/watch?v=R37JHiA-H0g>, 2016.
- [12] David Louapre. L’hypothèse de riemann. <https://www.youtube.com/watch?v=Kvcu1Wl-jhE&t=608s>, 2019.