Le triangle de Pascal

Benjamin Garcia

Mardi 10 janvier

Table des matières

1 Introduction

Le triangle de Pascal fait référence au mathématicien clermontois Blaise Pascal, qui l'a décrit et utilisé au XVIIe siècle. Même si ce triangle a déjà fait son apparition en Chine et en Inde aux XIe et XIIe siècles. Il est le premier homme connu à avoir utilisé le raisonnement par récurrence dans ses analyses et démonstrations. Le triangle de Pascal est un tableau triangulaire qui sert à représenter de manière optimale et utilitaire les coefficients binomiaux, c'est-à-dire les nombres définis pour tout entier naturel n et tout entier naturel k inférieur ou égal à n, donnant le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments. Ces nombres, aussi appelés coefficients du binôme, sont indispensables dans de nombreux domaines, comme le calcul de probabilités mais aussi en analyse combinatoire, l'étude des configurations de collections finies d'objets et des combinaisons d'ensembles finis. Dès lors, la représentation du triangle de Pascal revête d'une pléthore d'éléments mathématiques non négligeables, qui méritent une attention particulière. Ainsi nous pouvons nous demander quels sont les différents aspects inhérents à la représentation du triangle de Pascal et comment interagissent-ils entre eux ? Pour y répondre nous analyserons la construction des coefficients binomiaux et les notions d'ensemble des entiers naturels, de fonction factorielle et du raisonnement par récurrence.

2 Coefficients Binomiaux

Definition 1 En mathématiques (algèbre et dénombrement), les coefficients binomiaux, définis pour tout entier naturel n et tout entier naturel k inférieur ou égal à n, donnent le nombre de sous-ensembles différents à k éléments que l'on peut former à partir d'un ensemble contenant n éléments.

2.1 Ensemble des entiers naturels

Definition 2 En mathématiques, un ensemble est une collection de nombres ou d'objets. Ils sont fondamentaux dans certains raisonnements et même dans le **fondement interne** des mathématiques axiomatiques.

2.1.1 Histoire

L'ensemble que nous allons utiliser est sans doute le plus connu de tous, c'est l'ensemble des entiers naturels noté $\mathbb{N}$. Il contient tous les nombres positifs sans partie décimale, du type $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$. C'est l'ensemble à la base de la numération, celui que l'on utilise tous les jours pour compter. Quant à la plus vieille trace de comptage, elle remonterait à 35 000 ans av. J.-C. quand on a retrouvé un os (voir figure 1) en Afrique du Sud taillé de 29 encoches, montrant qu'ils avaient déjà un système de numération à la Préhistoire.

FIGURE 1 – Os de Lebombo daté d'environ 35 000 ans

2.1.2 Propriétés

Chaque ensemble est défini avec un certain nombre de propriétés arithmétiques. Passons en revue celles de $\mathbb{N}$.

- **Commutativité** : le résultat de l'addition ou de la multiplication ne dépend pas de l'ordre dans lequel sont données ces opérations. Si a et b sont deux entiers naturels, alors $a + b = b + a$ et $a \times b = b \times a$.
- **Associativité** : L'addition et la multiplication peuvent être appliquées à plus de deux termes sans avoir besoin de préciser les regroupements effectués. Si a, b et c sont trois entiers naturels, alors $(a+b)+c = a+(b+c)$ et $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.
- **Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition** : Si a, b et c sont trois entiers naturels, alors $(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$ et $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$.
- **Existence de neutres** : Pour tout entier naturel a, on a : $a + 0 = 0 + a = a$ et $a \times 1 = 1 \times a = a$.

2.2 Factorielle

En mathématiques, la factorielle d'un nombre n, avec $n \in \mathbb{N}$, est le produit de tous les entiers de 1 à n. On la note $n!$. Par exemple, 5! vaut 120 car : $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$. À noter aussi que $0! \neq 0$ mais $0! = 1$ par convention du **produit vide**.

Voici la définition mathématique de la factorielle :

$$n! = \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} i = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n.$$ [1]

La fonction factorielle intervient dans de nombreux domaines. Par exemple celui des polynômes avec la formule de Taylor mais aussi celui des probabilités et du dénombrement avec les coefficients binomiaux, elle est même une base pour définir la constante d'Euler (e).

Fun Fact

Le nombre 40 585 appelé aussi un factorion, est le plus grand nombre égale à la somme des factorielles de ses chiffres : $40585 = 4! + 0! + 5! + 8! + 5!$. À part lui il n'y a que 1, 2, et 145 qui ont cette propriété.

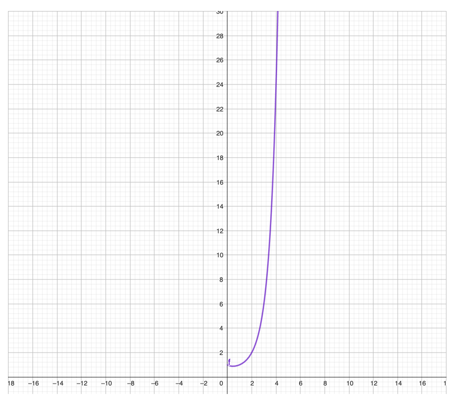

FIGURE 2 – Fonction factorielle

2.3 Raisonnement par récurrence

En mathématiques, le raisonnement par récurrence est un type de raisonnement qui consiste à démontrer une propriété que l'on suppose vraie pour tout entier naturel. Pour cela, on commence par conjecturer une hypothèse appelée "hypothèse de récurrence", puis on procède à son initialisation. C'est-à-dire vérifier qu'elle est vraie pour un certain rang. Par la suite, on vérifie son hérédité à partir de notre hypothèse, pour montrer que la propriété est vraie pour tous les entiers naturels.

1. Π_k^n signifie le produit fini de k à n, tous deux des entiers naturels.

Étapes :

1. Initialisation : On montre que la propriété est vraie pour un certain rang.
2. Hérédité : On raisonne sur notre propriété initiale pour retomber sur l'hypothèse de récurrence.
3. Conclusion : On conclut en disant que la propriété est vraie pour un rang n et est héréditaire, donc, elle est vraie pour tous les entiers naturels plus grands que celui de l'initialisation.

2.4 Coefficient binomial

Nous avons, à présent, tous les outils nécessaires pour bien comprendre la formule nous permettant de calculer les coefficients binomiaux, définis pour tout entier naturel ($\mathbb{N}$) n et pour tout entier naturel inférieur ou égal à k :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{1}$$

Cela se lit « k parmi n ».

Cette expression représente le nombre de parties à k éléments, c'est-à-dire le nombre de k combinaisons dans un ensemble fini à n éléments.

Prenons un exemple simple avec : $k = 2$ et $n = 3$

$$\begin{aligned}\binom{3}{2} &= \frac{3!}{2!(3-2)!} \\ &= \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot (1)} \\ &= \frac{6}{2} \\ &= 3.\end{aligned}$$

Et en effet, dans un ensemble à 3 éléments [a,b,c], il y a 3 parties de deux éléments : [ab], [ac] et [bc]. En représentant notre fonction (figure 3) pour n fixé égal à 3, on retrouve bien que $\binom{3}{2} = 3$.

2.4.1 Formule de Pascal

Soit $n, k \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq k \leq n$. Nous voulons démontrer la propriété d'addition des coefficients binomiaux. Elle nous sera utile, car c'est elle qui lie la formule $\binom{n}{k}$ au

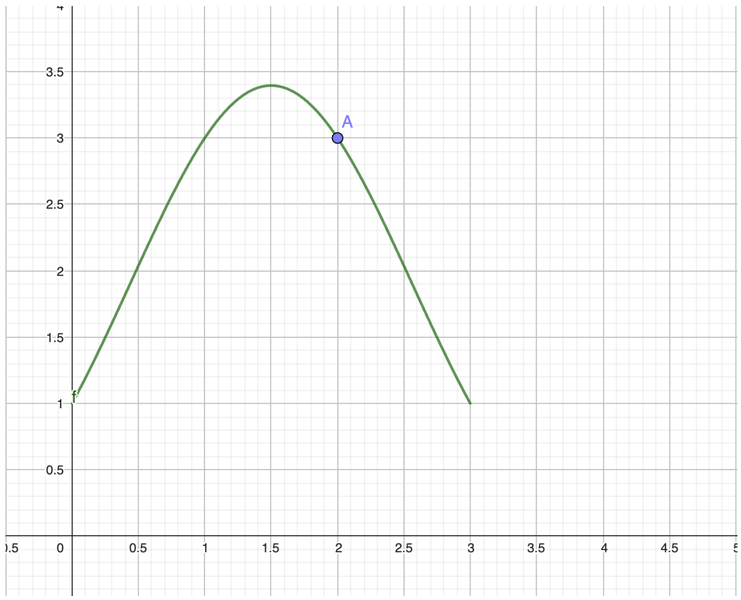

FIGURE 3 – Courbe de la fonction représentant les coefficients binomiaux pour un n fixé

triangle de Pascal :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Nous avons vu que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Appliquons cette formule aux termes de la propriété d'addition :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Examinons maintenant les termes du côté droit de la propriété d'addition :

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}$$

Trouvons un dénominateur commun pour additionner les deux fractions du côté droit :

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)! \cdot k + (n-1)! \cdot (n-1-k+1)}{k!(n-1-k+1)!}$$

Simplifions cela :

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)! \cdot (k+n-k)}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Cela correspond au terme du côté gauche de la propriété d'addition. Ainsi, la propriété d'addition des coefficients binomiaux est démontrée. Grâce à cette formule, on peut facilement créer le triangle de Pascal.

2.4.2 Triangle de Pascal

Comme dit en introduction, le triangle de Pascal est un moyen simple et efficace de représenter les coefficients binomiaux. Pour le construire, on doit se servir de la propriété $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ démontrée ici 2.4.1.

Voici un exemple de triangle de Pascal incomplet :

n|k	0	1	2	3
0	1			
1	1	1		
2	1	2	1	
3	1	3	?	1

Pour le compléter, on peut mettre en application directe notre formule de Pascal. On trouve : $\binom{3}{2} = \binom{3-1}{2-1} + \binom{3-1}{2} = 3$. Comme on le voit avec cette formule, pour trouver un coefficient binomial, on additionne la première case dans la diagonale gauche ainsi que celle juste au-dessus pour trouver la valeur souhaitée. Par exemple, pour trouver facilement $\binom{4}{2}$:

n|k	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

On trouve bien 6. Dans cet exemple, la taille du triangle n'est pas très grande, mais on peut évidemment en construire des bien plus grands.

3 Binôme de Newton

Le binôme de Newton est une formule qui permet de calculer une expression du type $(x+y)^n$ plus simplement qu'en développant. n est un entier naturel, x et y peuvent être des réels, des complexes, des polynômes ou même des matrices carrées, si x ou

y est la matrice identité.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Formule du binôme de Newton

On voit bien ici l'utilisation des coefficients binomiaux qui serviront à dénombrer les combinaisons des produits lors du développement de l'expression. Pour démontrer cette formule, on peut utiliser le raisonnement par récurrence.

3.1 Démonstration

Theorem 1 (Binôme de Newton) *L'hypothèse de récurrence H_n au rang $n \in \mathbb{N}$ est :*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

PROOF **Initialisation**

Pour $n = 0$, $(a+b)^0 = 1$ et $\binom{0}{0} a^0 b^0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$, donc H_0 est vraie.

Hérédité

Supposons H_n vraie pour un $n \in \mathbb{N}$, et montrons que H_{n+1} est vraie.

Pour commencer :

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n$$

Par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}
\end{aligned}$$

Faisons le changement de variable $i = k+1$ dans la première somme, puis renommons i en k :

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}$$

Isolons le terme $k = n+1$ de la première somme et le terme $k = 0$ de la seconde, puis réunissons les deux sommes pour $k \in \{1, \dots, n\}$:

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n-k+1} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1}$$

Comme $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$, $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$ et $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$:

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1}$$

En regroupant les termes sous une même somme, nous pouvons conclure :

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

Autrement dit, H_{n+1} est vraie.

4 Algorithme

Voici un algorithme en pseudo-code permettant de calculer les combinaisons $\binom{n}{k}$ il renvoie la liste des combinaisons possible, la longueur de cette liste est le résultat de $\binom{n}{k}$

```
    function generer_combinaisons(ensemble, k):
    n = taille(ensemble)
    resultat = []  // liste pour stocker toutes les combinaisons


    indices = [0] * k

```

```
tant que le premier indice n'est pas superieur a (n - k):
combinaison = []


pour i de 0 a k-1 faire
ajouter ensemble[indices[i]] a combinaison

ajouter une copie de combinaison a resultat


i = k - 1
tant que i >= 0 et indices[i] == n - k + i faire
i = i - 1

si i >= 0 alors
indices[i] = indices[i] + 1
pour j de i+1 a k-1 faire
indices[j] = indices[i] + j - i
fin si

retourner resultat
```

Listing 1 – calcul et liste des combinaisons k parmi n en pseudo-code

Le code suivant est un programe itératif en python, qui renvoie la valeur de $\binom{n}{k}$. En plus de la fonction "combinaison_k_par_n" on a implémenté une fonction "factorielle" (même si on peut l'avoir simplement avec le module "math" de python).

```
def factorielle(nombre):
resultat = 1
for i in range(1, nombre + 1):
resultat *= i
return resultat

def combinaison_k_par_n(k, n):
if k < 0 or k > n:
return 0
return factorielle(n) // (factorielle(k) * factorielle(n -
   k))
```

Listing 2 – calcul de la combinaison k parmi n en python

Pour finir voici une fonction qui calcule la même chose mais cette fois-si elle le fait de mainière **récursive**, donc une fonction qui s'auto appelle jusqu'à atteindre son cas d'arrêt et renvoyer la valeur souhaitée.

```
def kparmisn(k,n):
if k==0 or k==n:
return 1
else:
return kparmisn(k-1,n-1)+kparmisn(k,n-1)
```

Listing 3 – calcul de la combinaison k parmi n en python de façon récursive

5 Conclusion

En somme nous avons pu comprendre comment représenter et utiliser le triangle de Pascal. Cependant on s'aperçoit qu'un grand nombre d'aspects mathématiques gravitent autour de cet outil, ainsi il ne constitue pas réellement le centre de cet article. Cette introduction au triangle de Pascal peut être le point de départ pour explorer plus en profondeur divers domaines mathématiques. Par exemple, l'étude des propriétés algébriques des coefficients binomiaux, les applications en probabilités et statistiques, ou encore l'approfondissement des relations avec d'autres structures combinatoires. En élargissant la portée de notre exploration, nous pourrions découvrir de nouvelles perspectives et applications fascinantes.

Références

[1] *Blaise Pascal*. Disponible à : `https://fr.wikipedia.org/wiki/Blaise_Pascal` (Consulté le 11 janvier 2024).

[2] *Blaise Pascal(futurama)*. Disponible à : `https://www.futura-sciences.com/sciences/personna` (Consulté le 11 janvier 2024).

[3] *L'HISTOIRE DES NOMBRES*. Disponible à : `https://saintlaurent.enseignementlibremarche.be/wp-content/uploads/2013/03/Les-ba` (Consulté le 11 janvier 2024).

[4] *Une Histoire des Nombres*. Disponible à : `https://www.math93.com/index.php/histoire-des-maths/histoire-des-nombres/154-hist` (Consulté le 12janvier 2024).

[5] Yvan Monka. *ENSEMBLES DE NOMBRES*. Disponible à : https://www.maths-et-tiques.fr/telech/1_Ensembles_nombres.pdf (Consulté le 12 janvier 2024).

[6] *Entiers naturels*. Disponible à : https://fr.wikipedia.org/wiki/Entier_naturel (Consulté le 12 janvier 2024).

[7] *Studymaster, factorielle*. Disponible à : https://www.studysmarter.fr/resumes/mathematiques (Consulté le 13 janvier 2024).

[8] *Raisonnement Par Récurrence, educastream*. Disponible à : https://www.educastream.com/fr/raisonnement-recurrence-terminale-s (Consulté le 13 janvier 2024).

[9] *Rainsonement par récurence, wikipedia*. Disponible à : https://fr.wikipedia.org/wiki/Raisonnement_par_récurrence (Consulté le 13 janvier 2024).

[10] *Coefficients binomiaux et loi de Pascal*. Disponible à : https://www.maxicours.com/se/cours/coefficients-binomiaux-et-loi-de-pascal/ (Consulté le 12 janvier 2024).

[11] *Coefficient binomial - Définition*. Disponible à : https://www.techno-science.net/glossaire-definition/Coefficient-binomial.html (Consulté le 11 janvier 2024).

[12] *Coefficient binomial*. Disponible à : https://fr.wikipedia.org/wiki/Coefficient_binomial (Consulté le 11 janvier 2024).

[13] *Triangle de Pascal*. Disponible à : https://fr.wikipedia.org/wiki/Triangle_de_Pascal (Consulté le 12 janvier 2024).

[14] *Triangle de pascal et coefficient binomial*. Disponible à : https://www.paramaths.fr/triangle-de-pascal (Consulté le 14 janvier 2024).

[15] *Appliquer la formule du binôme de Newton - Terminale - Maths expertes*. Disponible à : https://www.youtube.com/watch?v=UsYH9PvppPo (Consulté le 14 janvier 2024).

[16] *Démonstration de la Formule du Binôme de Newton*. Disponible à : https://www.youtube.com/watch?v=yuV9Oo5GZTsl (Consulté le 14 janvier 2024).

[17] *Binôme de Newton - Coefficients binomiaux*. Disponible à : https://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=./b/binome.html (Consulté le 14 janvier 2024).